# Теоретический тур
## Решения задач

*Уважаемые коллеги! Просьба при оценивании не учитывать дважды переходящие ошибки. К примеру, в задаче 2 участник мог неправильно рассчитать момент захода в пункте а), но при этом решил правильно все остальные пункты. Однако для получения правильного ответа в остальных пунктах потребуется время, рассчитанное вначале. И сделав ошибку в самом начале, участник олимпиады даст неправильные ответы и во всех остальных. В таком случае баллы снижаются только за пункт а). Приведенные баллы и схема оценивания – приблизительные, жюри может их менять по своему усмотрению. В случае возникновения вопросов по задачам обращайтесь по телефону +375 29 257 08 09.*

**1. (10 баллов за задачу)**

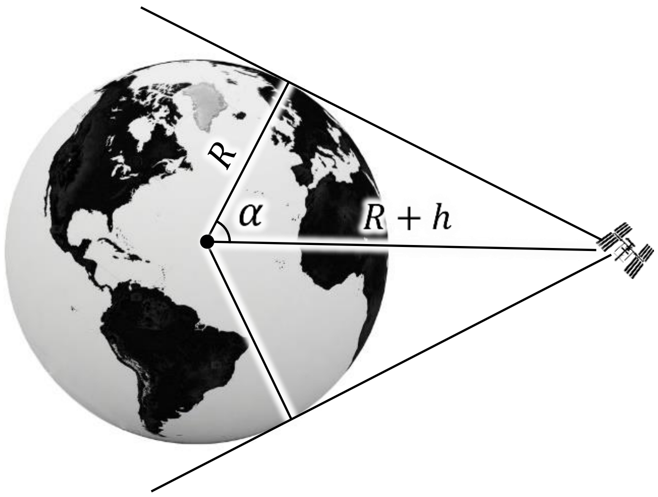


***Рис. 1.*** *Видимая с МКС часть Земли.*

**а) (3 балла)** Космонавт будет видеть со станции круглый участок Земли, который является сферической поверхностью шарового сегмента (рис. 1). Пусть $\alpha$ — это угловой радиус такого участка:

$$\cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$$

Формулу для площади сферической поверхности шарового сегмента можно записать через этот угол:

$$S = 2\pi R_\oplus H = 2\pi R_\oplus\left(R_\oplus - R_\oplus\cos\alpha\right) = 2\pi R_\oplus^2(1-\cos\alpha).$$

Тогда отношение площади этой сферической поверхности к полной площади поверхности Земли составит

$$\frac{S}{S_\oplus} = \frac{2\pi R_\oplus^2(1-\cos\alpha)}{4\pi R_\oplus^2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\dfrac{R_\oplus}{R_\oplus + h}}{2} = \frac{h}{2(R_\oplus + h)} = 0{,}031.$$

То есть, космонавт с МКС видит примерно 3% поверхности Земли в любой момент времени.

**б) (3 балла)** Если бы в предыдущем пункте мы вычислили бы угол $\alpha$, то получили бы, что $\alpha = 20{,}14°$. Т. е. самые удаленные точки, еще видимые с МКС, будут отдалены на этот угол от той точки, что лежит строго под станцией.

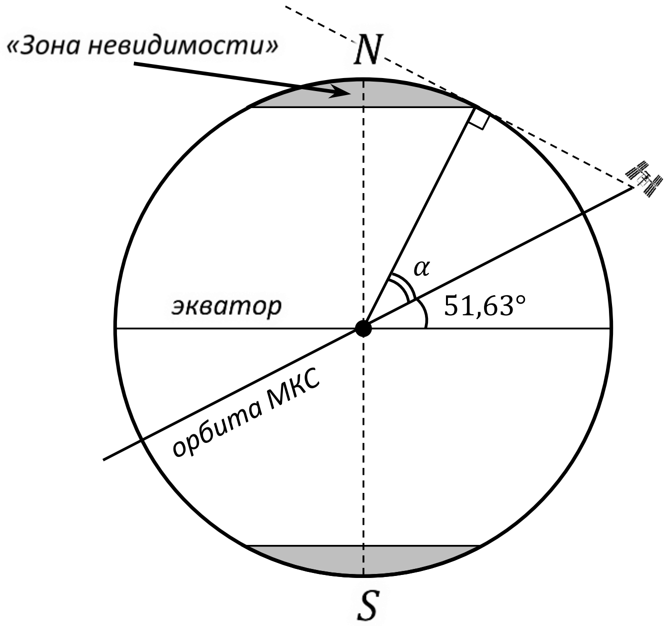


***Рис. 2.*** *Орбита МКС и невидимые с Земли зоны нашей планеты.*

Угол наклона к экватору орбиты МКС составляет $51{,}63°$. Это означает, что станция может располагаться над географическими широтами в диапазоне $(-51{,}63°;\ +51{,}63°)$. Космонавты смогут наблюдать земные объекты на этих широтах плюс-минус $20{,}14°$, т. е. в диапазоне широт $(-71{,}77°;\ +71{,}77°)$.

То есть, космонавты смогут наблюдать большую часть поверхности Земли за исключением двух «шапочек» на полюсах, угловой радиус каждой из которых при наблюдении из центра Земли составит $\alpha = 90° - 71{,}77° = 18{,}23°$. Доля поверхности Земли, занимаемая одной такой «шапочкой», будет равна (см. предыдущий пункт)

$$\frac{S}{S_\oplus} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = 0{,}025.$$

Всего невидимых зон будет две, поэтому космонавтам будет недоступно для наблюдений 5% площади земного шара. Соответственно, доступно для наблюдений будет **95%**.

**в) (4 балла)** Наибольшее время наблюдения станции над горизонтом будет соответствовать моменту, когда МКС проходит через зенит. За это время она пройдет по своей орбите дугу (рис. 3)

$$\beta = 2\arccos\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = 40{,}2°.$$

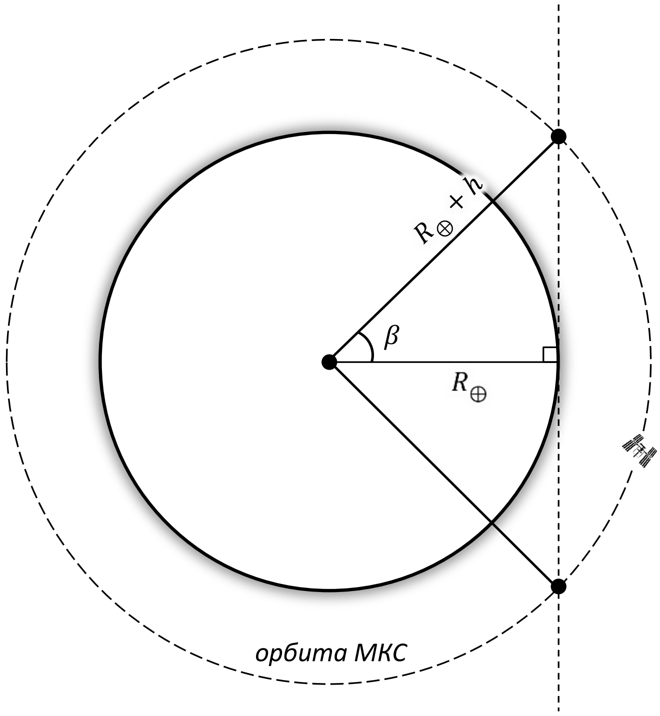


***Рис. 3.*** *Видимая часть орбиты МКС для земного наблюдателя.*

Время нахождения над горизонтом $t$ найдем из пропорции: $t = \beta/360° \cdot T$, где $T$ − орбитальный период обращения МКС. Найдем этот период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(R_\oplus + h\right)^3}{GM_\oplus}} = 5570^s.$$

Тогда $t = 40{,}2°/360° \cdot 5570^s = 622^s = \mathbf{10^m22^s}$. В реальности это время обычно меньше, потому что МКС во время пролета неминуемо попадет в земную тень.

**2. (10 баллов за задачу)**

**а) (3 балла)** В момент равноденствия Солнце находится ровно на небесном экваторе и заходит в $18^h00^m$ по истинному солнечному времени. Переведем его в белорусское (поясное летнее) время, взяв уравнение времени из графика:

$$T_{\text{Бел}} = T_\odot + \eta - \lambda + 3^h = 18^h00^m - 0^h08^m - 1^h50^m + 3^h = \mathbf{19^h02^m}.$$

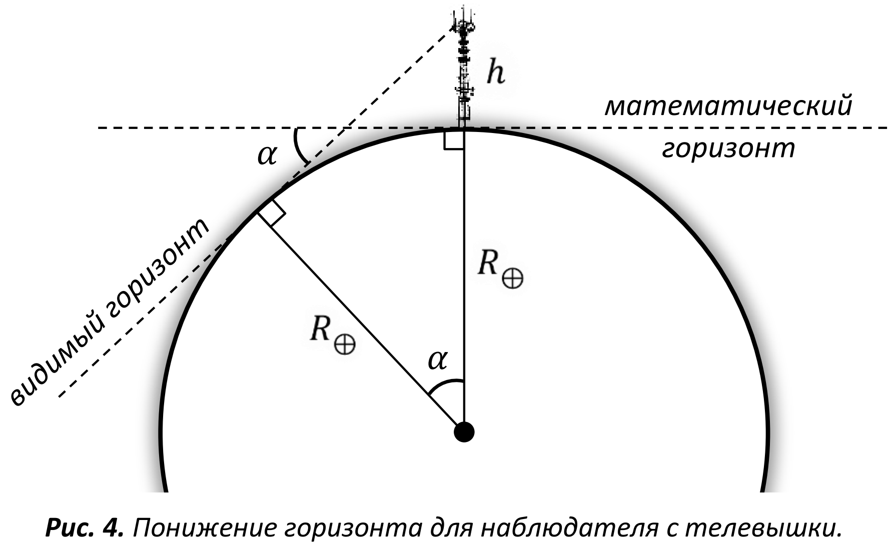


***Рис. 4.*** *Понижение горизонта для наблюдателя с телевышки.*

**б) (3 балла)** С вершины башни заход Солнца будет наблюдаться позже из-за понижения горизонта. Найдем угол, на который горизонт для наблюдателя на башне будет ниже, чем для стоящего на земле минчанина (рис. 4):

$$\alpha = \arccos\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = 0{,}43°.$$

Определим теперь, с какой скоростью изменяется высота Солнца в момент захода в день равноденствия. Если пренебречь изменением уравнения времени, то в день равноденствия угловая скорость движения Солнца по небу составляет $15°$ в час. Однако Солнце заходит не перпендикулярно горизонту, а под углом $90° - \varphi = 36°06'$. Тогда его высота будет изменяться со скоростью (рис. 5)

$$\Delta h/\Delta t = 15°\ \text{час}^{-1} \cdot \sin 36°06' = 8{,}84°\ \text{в час.}$$

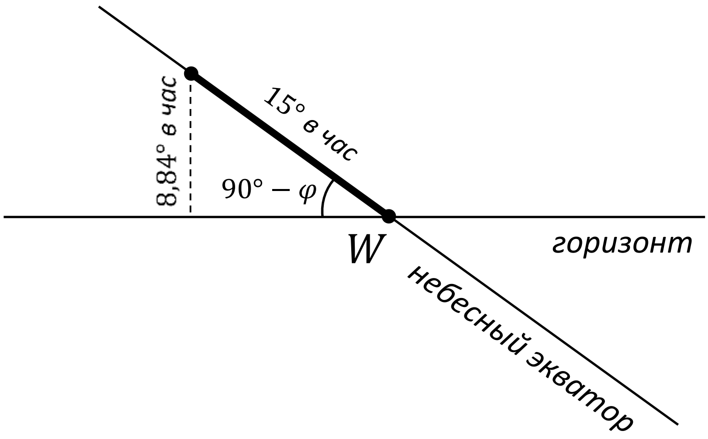


***Рис. 5.*** *К вычислению скорости изменения высоты Солнца в момент захода.*

Разность моментов захода Солнца для наблюдателей на башне и на земле будет соответствовать времени, за которое его высота изменится на угол $\alpha$:

$$t = \frac{\alpha}{\Delta h/\Delta t} = 0{,}049\ \text{часа} = 2{,}9\ \text{минуты.}$$

Значит, наблюдатель увидит заход Солнца примерно в $\mathbf{19^h 05^m}$.

**в) (1 балл)** Решение в случае самолета будет идентичным, только с другими числами. Понижение горизонта:

$$\alpha = \arccos\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = 3{,}2°.$$

Разность моментов захода Солнца для наблюдателей в самолете и на земле:

$$t = \frac{\alpha}{\Delta h/\Delta t} = 0{,}36\ \text{часа} = 22\ \text{минуты.}$$

Самолеты, пролетающие над телевышкой, перестанут освещаться лучами Солнца в $\mathbf{19^h 24^m}$.

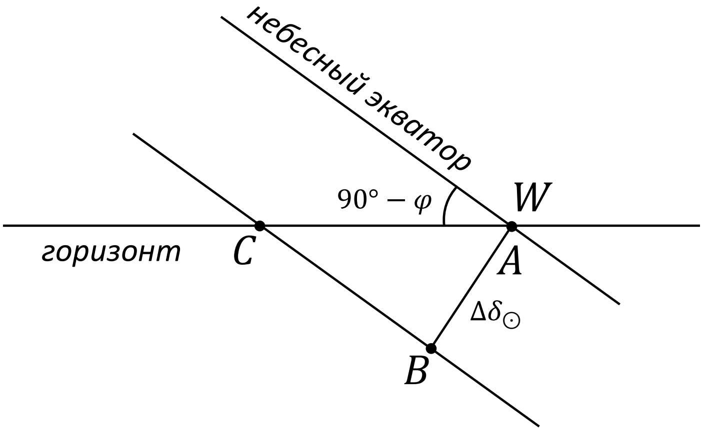


***Рис. 6.*** *Суточный путь Солнца в день равноденствия (справа) и на следующий день (слева).*

**г) (3 балла)** Рассмотрим рис. 6, на котором отмечены суточный путь Солнца в день равноденствия и на следующий день. Путь Солнца от точки $A$ до точки $B$ (точки с одинаковым часовым углом) займёт 24 часа. Однако Солнце еще то того как придет в точку $B$, зайдет за горизонт в точке $C$, т. е. это произойдет несколько раньше – на промежуток времени, за который Солнце проходит отрезок $BC$.
Зная угол наклона экватора к горизонту ($90° - \varphi$), искомый отрезок можно найти как $BC = AB\,\mathrm{tg}\,\varphi$. $AB$ – это изменение склонения Солнца $\Delta\delta_\odot$ за один день. В общем случае отыскать эту величину довольно непросто, но в день равноденствия задача сильно упрощается. Солнце за сутки проходит по эклиптике приблизительно $360°/365{,}24^d = 0{,}99°$. Можно считать, что пройденный за одни сутки участок эклиптики является прямым отрезком. Тогда изменение склонения за сутки составит (см. рисунок)

$$\Delta\delta_\odot = 0{,}99° \cdot \sin 23°26' = 0{,}39°.$$

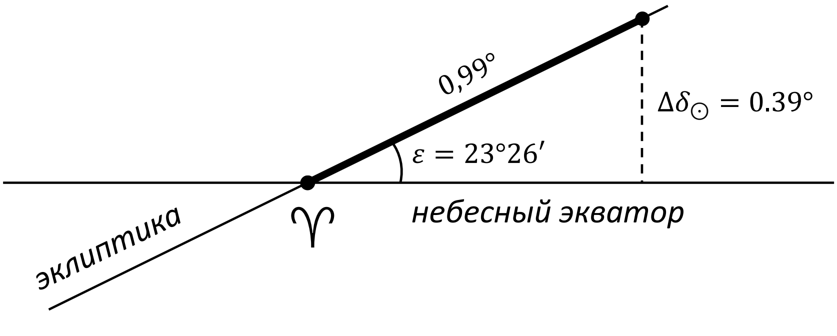


***Рис. 7.*** *К расчету суточного изменения склонения Солнца.*

Тогда, возвращаясь к рис. 6, получаем:

$$BC = \Delta\delta_\odot\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}54°.$$

Солнце проходит этот отрезок за $0{,}54°/360° \cdot 24^h = 0{,}036^h = 2$ мин. Значит, на следующий день Солнце зайдет в $\mathbf{19^h00^m}$.

**3. (10 баллов за задачу)**

**а) (1 балл)** Меркурий был между Землей и Солнцем – это нижнее соединение.

**б) (1 балл)** Условие нижнего соединения еще не является достаточным для наблюдения прохождения Меркурия по диску Солнца. Необходимо, чтобы Меркурий пересекал орбиту Земли, т. е. находился вблизи одного из узлов своей орбиты (ведь орбита Меркурия наклонена на 7° по отношению к земной). В реальности для наблюдателя с Земли Меркурий в нижнем соединении обычно проходит выше или ниже Солнца.

**в) (2 балла)** Узлы хоть и перемещаются с течением времени, но очень медленно (с периодом 260 000 лет), поэтому можно грубо считать, что они находятся в одном и том же месте орбиты. Следовательно, прохождение Меркурия можно наблюдать, когда и Земля попадает в соответствующие этим узлам точки своей орбиты. И этим точкам соответствуют конкретные месяцы года. В данном случае это май и ноябрь.

**г) (3 балла)** Оценим вначале угловой диаметр Солнца при наблюдении с Земли (участники могут его использовать и по памяти):

$$d_{\odot} = \frac{2R_{\odot}}{a_{\oplus}} = 32{,}0'.$$

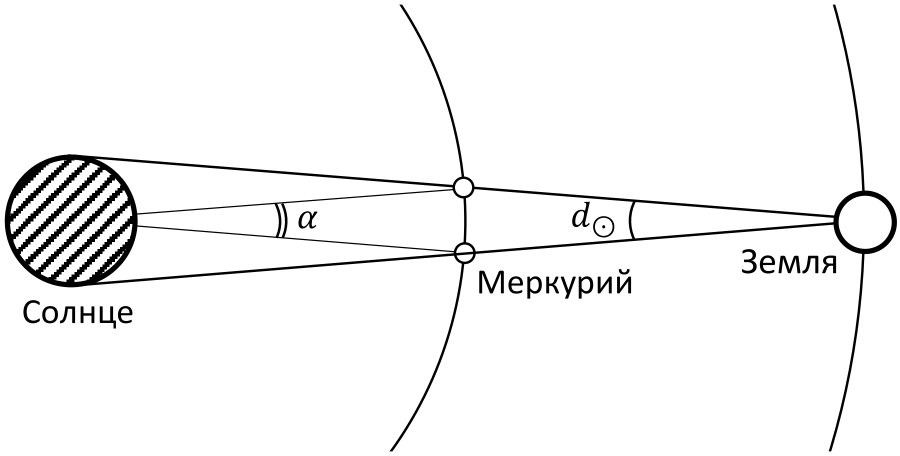


***Рис. 8.*** *Схема центрального прохождения Меркурия по диску Солнца.*

За время прохождения по диску Солнца Меркурий <u>относительно Земли</u> пройдет некоторую дугу своей орбиты (см рисунок выше). Определим величину этой дуги $\alpha$ (можно считать эту дугу прямым отрезком):

$$a_{\mathrm{M}} \cdot \alpha = \left(a_{\oplus} - a_{\mathrm{M}}\right) \cdot d_{\odot},$$
$$\alpha = \frac{\left(a_{\oplus} - a_{\mathrm{M}}\right)}{a_{\mathrm{M}}} \cdot d_{\odot} = 50{,}7'.$$

Определим сидерический и синодический периоды Меркурия:

$$T_{\mathrm{M}} = \sqrt{a_{\mathrm{M}}^3} = 0{,}238 \text{ года},$$
$$S_{\mathrm{M}} = \frac{T_{\oplus} T_{\mathrm{M}}}{T_{\oplus} - T_{\mathrm{M}}} = 0{,}312 \text{ года}.$$

Мы знаем, что <u>относительно Земли</u> Меркурий проходит 360° за синодический период. Тогда угол $\alpha$ он преодолеет за время

$$t = \frac{\alpha}{360°} \cdot S_{\mathrm{M}} = 7{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ года} = 6{,}4^h.$$

Таким образом, максимальная продолжительность транзита Меркурия по диску Солнца составляет **6,4 часа**. Следует заметить, что 11 ноября прохождение длилось меньше времени, так как Меркурий в реальности движется не по круговой орбите и в день транзита его расстояние от Солнца было меньше среднего.

**д) (3 балла)** Отыщем угол Меркурий – Солнце – Земля в момент элонгации (рис. 9):

$$\beta = \arccos a_{\mathrm{M}}/a_{\oplus} = 67{,}2°.$$

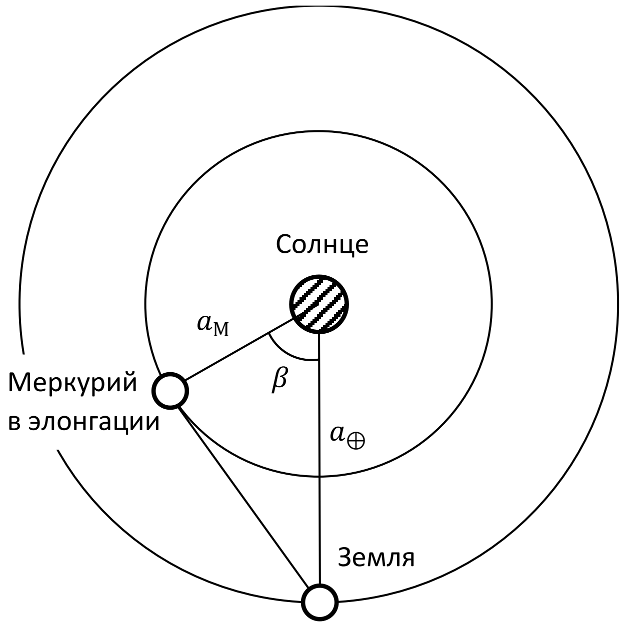


***Рис. 9.*** *Восточная элонгация Меркурия.*

Найдем аналогично предыдущему пункту, за какое время этот угол изменится на 67,2°, уменьшившись до нуля:

$$t = \frac{\beta}{360°} \cdot S_{\text{М}} = 0{,}058 \text{ года} = 21^d.$$

Значит, восточная элонгация случилась на 21 день раньше, 21 октября. Хотя на самом деле из-за эллиптичности орбиты эта элонгация произошла 20 октября.

**4. (10 баллов)** Допустим, что искомая точка лежит на прямой Солнце – Сириус (рис. 10).

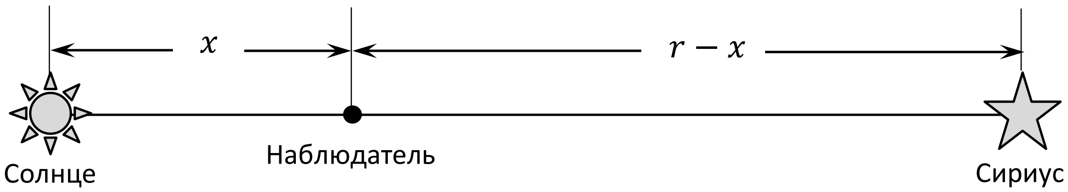


***Рис. 10.*** *Положение искомой точки на прямой Солнце – Сириус.*

Пусть искомое расстояние от Солнца будет $x$, тогда расстояние от этой точки до Сириуса будет $r - x$. Зная, что освещенность площадки, перпендикулярной направлению падения лучей, пропорциональна светимости звезды и обратно пропорциональна квадрату расстояния до нее, можно записать:

$$\frac{L_\odot}{x^2} = \frac{L_{\text{С}}}{(r-x)^2},$$
$$\frac{(r-x)^2}{x^2} = \frac{L_{\text{С}}}{L_\odot} = 25.$$

Извлекая корень из левой и правой части, не забываем, что получим два уравнения:

$$\frac{r-x}{x} = 5 \qquad\qquad \frac{r-x}{x} = -5$$
$$x_1 = 0{,}44 \text{ пк} \qquad\qquad x_2 = -0{,}66 \text{ пк}$$

Получается, что на линии Солнце – Сириус искомая точка может находиться как на расстоянии 0,44 пк в направлении Сириуса, так и на расстоянии 0,66 в противоположном от него направлении.

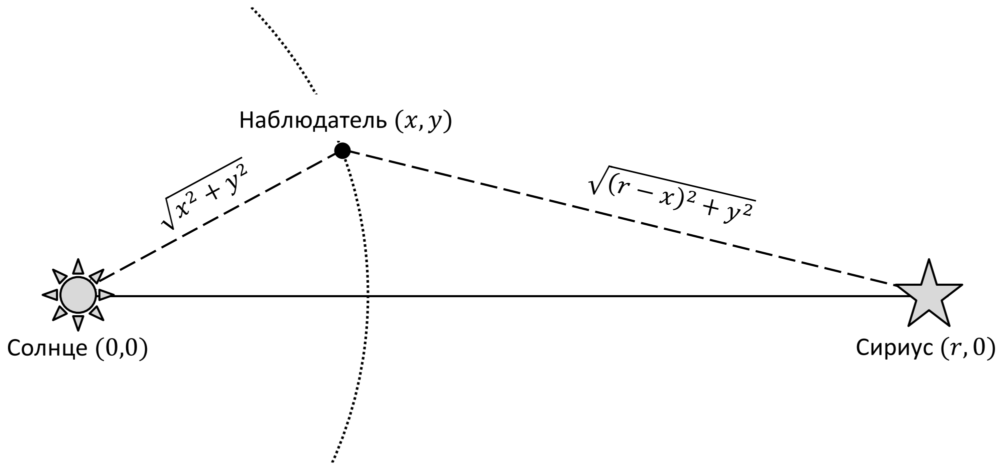


***Рис. 11.*** *Положение искомой точки на плоскости.*

Однако это лишь две из бесконечного числа точек. Кто сказал нам, что эти точки обязательно должны лежать на прямой, соединяющей звезды? Рассмотрим решение в двумерной плоскости (рис. 11). Пусть наш пункт имеет координаты $(x, y)$. Тогда расстояние до Солнца составит $\sqrt{x^2 + y^2}$, а до Сириуса оно будет равно $\sqrt{(r - x)^2 + y^2}$. Снова приравняем блеск этих звезд:

$$\frac{L_\odot}{x^2 + y^2} = \frac{L_\text{С}}{(r - x)^2 + y^2},$$
$$\frac{(r - x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 25.$$

Преобразуем это выражение, постаравшись выделить полные квадраты с $x$ и $y$ (для удобства подставим 2,64 пк вместо $r$):

$$6{,}9696 - 5{,}28x + x^2 + y^2 = 25x^2 + 25y^2,$$
$$x^2 + 0{,}22x + y^2 - 0{,}2904 = 0,$$
$$(x + 2 \cdot 0{,}11x + 0{,}11^2) + y^2 - 0{,}3025 = 0,$$
$$(x + 0{,}11)^2 + y^2 = 0{,}55^2.$$

В итоге мы пришли к каноническому уравнению окружности. А если заметить еще, что любую из точек этой окружности можно вращать вокруг линии Солнце – Сириус (задача абсолютно симметричная относительно этой оси), то мы получим сферу. Таким образом, **окончательный ответ**: невозможно дать одно значения расстояния от Солнца – множество точек, откуда блеск Сириуса и Солнца будет одинаков, образуют сферу радиусом 0,55 пк с центром, расположенным на линии Солнце – Сириус на 0,11 пк позади Солнца. **(За нахождение только одной точки – 4 балла, за нахождение двух точек на линии Солнце-Сириус – 6 баллов, за ответ со сферой – 10 баллов)**

**Всего 40 баллов за теоретический тур**